

平成 30 年度機械・航空宇宙工学科学部講義 応用構造理論

第六回 講義資料

航空宇宙工学専攻 准教授 吉村 彰記

2018 年 5 月 22 日

はじめに

本ノートは平成 30 年度機械・航空宇宙工学科学部の学部講義「応用構造理論」の第 6 回の講義資料である。本講義では、大たわみ理論を用いて、棒の座屈解析を実施するとともに、有限要素法を用いた座屈解析を実施した。講義では、大たわみ理論は小林繁夫、近藤恭平著の「弾性力学」(培風社)の第 11 章に基づいて定式化しているが、一部異なるところもある。また、有限要素解析については岡部朋永著「テンソル解析から始める応用固体力学」を参考に行っている。数式番号等は、講義で使用している番号と同じである。

5 ベルヌーイ・オイラーの仮説

変位については、ベルヌーイ・オイラーの仮説に従うものとする。つまり、

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \quad (17)$$

$$w(x, z) = w(x) \quad (18)$$

であるとする。これが意味するところは、ある変形についてもともと変形前に中央線に対して垂直な線上にあった点は、変形後も中央線に垂直な線上にある、ということである(図6)。これは薄いはりにおいては概ね妥当である。

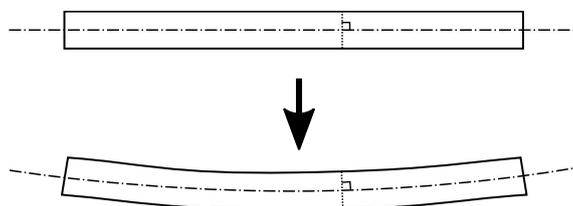


図 6 ベルヌーイ・オイラーの仮説の幾何学的な意味

これを変位-ひずみ関係式(12)に代入すると、

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0} - z\kappa_x \quad (19)$$

$$\kappa_x = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (21)$$

ここで ε_{x_0} は曲げ中心（中立面）のひずみ（膜ひずみ）に相当し， κ_x は中立面の曲率に相当する。

式 (19) から (21) を式 (15) に適用することにより，

$$T_x = EA\varepsilon_0 = EA \left\{ \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \quad (22)$$

となる。一方，これを式 (16) に適用すると，

$$M_x = -E \int_A z^2 dA \kappa_x = -EI \kappa_x = -EI \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (23)$$

となる。ここで A は断面積， I は断面二次モーメントを意味する。

また，平衡方程式 (10) より，せん断力 Q_x は

$$Q_x = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (24)$$

となる。

ここで，ベルヌーイ・オイラーの仮説の下での平衡方程式 (8) を考えると，左辺第二項は左辺第一項よりも十分に小さい（詳細が気になる方は後日アップロードする「補足」を参照してください）ため，ここでは無視することとする。これにより平衡方程式 (8) は以下のように書き直すことができる。

$$\frac{dT_x}{dx} + q_x = 0 \quad (25)$$

以上から，ベルヌーイ・オイラーの仮説（式 (19) から式 (21)）を平衡方程式 (9),(10),(25) に代入して整理すると，

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + T_x \frac{d^2w}{dx^2} - q_x \frac{dw}{dx} + q_z = 0 \quad (26)$$

と，たわみ w に関する支配方程式を得ることができる。

6 境界条件

ベルヌーイ・オイラーの仮定を導入したので，変位境界条件は中立面の x 方向変位 u_0 と，たわみ w に関して以下のように与えられる。

$$u_0 = \hat{u}_0, \quad w = \hat{w}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{d\hat{w}}{dx} \quad (27)$$

いっぽう，荷重境界条件については，たわみによる荷重方向の変化を考慮に入れると，

$$T_x \cos \frac{dw}{dx} - Q_x \sin \frac{dw}{dx} = \hat{F}_x \quad (28)$$

$$Q_x \cos \frac{dw}{dx} + T_x \sin \frac{dw}{dx} = \hat{F}_x \quad (29)$$

となる。ここで式 (1),(2) の近似を考慮し、更に、式 (25) における理由と同じ理由で式 (28) の左辺第二項は無視することができるので、

$$T_x = \hat{T}_x \quad (30)$$

および

$$-\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + T_x \frac{dw}{dx} = \hat{F}_x \quad (31)$$

を荷重境界条件として適用する。また、モーメントに関する境界条件としては、

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \hat{M}_x \quad (32)$$

となる。

例題

中央に集中荷重を受ける単純支持はりのたわみ

図7のように、スパン中央に集中荷重を受け、両端が単純支持され、方端部に引張荷重 T_0 が加えられたはりを考える。なお、ここで体積力はかかっていないものとする。

$$q_x = 0, q_z = 0 \quad (33)$$

このとき、式 (25) より、

$$\frac{dT_x}{dx} = 0 \quad (34)$$

となり、 T_x は x によらず一定の値となる。このため、今後、 $0 \leq x \leq l$ の範囲のみ考えるものとする。

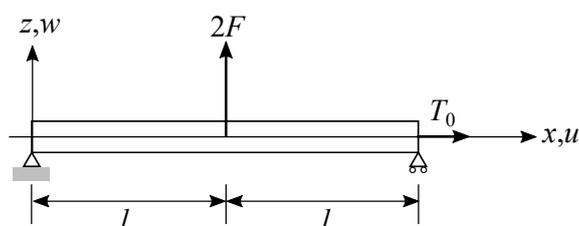


図7 中央に集中荷重を受ける両端単純支持のはり

ここで、式 (26) について、

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + T_x \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{T_x}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

となる。ここで、 $\alpha^2 = T_x l^2 / EI$ とすると、

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \left(\frac{\alpha}{l} \right)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (35)$$

となる。境界条件については、

$$w = 0, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (\text{at } x = 0)$$

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad -EI \frac{d^3w}{dx^3} = F \quad (\text{at } x = l)$$

である。

ここで、式 (35) の一般解の形は、

$$w = C_0 + C_1 \left(\frac{w}{l}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\alpha}{l}x\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\alpha}{l}x\right) \quad (36)$$

であるから、これに境界条件を適用すれば、

$$C_0 = -1$$

$$C_1 = \frac{Fl^3}{EI\alpha^2}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{Fl^3}{EI\alpha^3 \cosh \alpha}$$

が得られる。すなわち、式 (35) の解を

$$w = \frac{Fl^3}{EI\alpha^2} \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{l}x\right)}{\alpha \cosh \alpha} \right\} \quad (37)$$

と得ることができる。

最大たわみは $x = l$ の部分であり、 $\alpha^2 = T_0 l^2 / EI$ であるから、

$$w_{\max} = \frac{Fl}{T_0} \left\{ 1 - \frac{\tanh \alpha}{\alpha} \right\} \quad (38)$$

となる。このとき、横軸に α 、縦軸に無次元化した最大たわみを取ったグラフを図8に示す。ここで、横軸は軸力に相当する。軸力が強くなるにしたがって、最大たわみが減少する、すなわち、見かけの曲げ剛性が上がっていることがわかる。大たわみによる非線形性を考慮しない場合は曲げ剛性は一定になるので、特に曲げ剛性が小さい場合や軸力が高い場合は、大たわみによる非線形の効果を考えないと変形を過大評価することになる。

7 構造力学による一軸圧縮における座屈荷重算出

ここで、両端を拘束支持されたはりについて、圧縮荷重 P が負荷される問題を考える (図9)。なお、ここでは体積力は働かないとする。

ここで軸方向、曲げの境界条件は以下の通りになる。

$$u_0 = 0 \quad (\text{at } x = 0), \quad T_x = -P \quad (\text{at } x = l) \quad (39)$$

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (\text{at } x = 0, l) \quad (40)$$

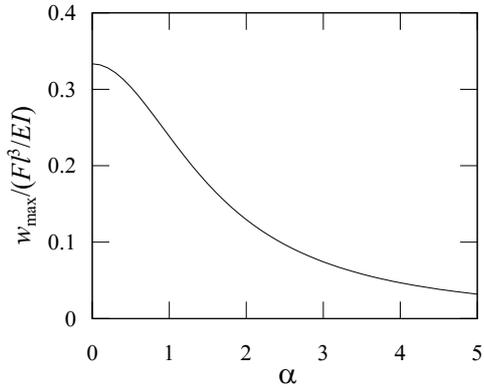


図8 最大たわみと軸力の関係

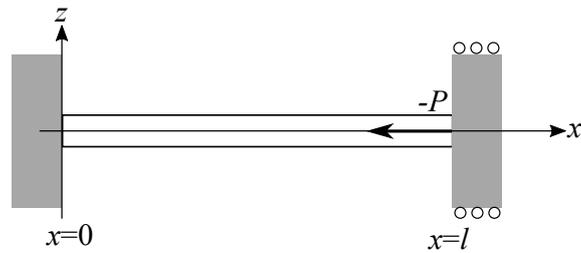


図9 両端拘束支持柱の圧縮

このとき、体積力が働いていないと仮定しているので、式(34)が成立し、軸方向荷重 T_x は x によらず一定であり、境界条件式(39)から、柱状のすべての点において $T_x = -P$ である。これを式(26)に代入すると、

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (41)$$

となる。これより、

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{\beta}{l} \right)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (42)$$

ただし、

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{EI} \quad (43)$$

と書き直すことができる。

式(42)の一般解は

$$w = C_0 + C_1 \left(\frac{x}{l} \right) + C_2 \sin \left(\frac{\beta}{l} x \right) + C_3 \cos \left(\frac{\beta}{l} x \right) \quad (44)$$

となるので、これに境界条件を考えると、以下の式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/l & \beta/l & 0 \\ 1 & 1 & \sin \beta & \cos \beta \\ 0 & 1/l & \beta/l \cos \beta & -\beta/l \sin \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

ここで、式 (45) の左辺の係数マトリクスが逆行列を持つ場合、逆行列を両辺に左からかける事により、

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

という解を得ることができる。この場合、全領域で $w = 0$ であり、たわみを生じない、という解となる。

しかし、式 (45) の左辺の係数マトリクスは常に逆行列を持つとは限らない。ここで、

$$\beta = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (47)$$

の時を考えると、式 (45) は、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/l & \beta/l & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/l & \beta/l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

となり、係数マトリクスに逆行列が存在しないことになる。できる限り係数の持つ関係を求めると、

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 0 \\ C_0 + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 C_0 と C_3 は上記関係式を満たす条件下で任意の値を取ることができる。このため、たわみ w は、

$$w = C_0 \left(1 - \cos \left(\frac{2m\pi}{l} x \right) \right) \quad (49)$$

となり、 C_0 は任意の値をとり得るので、解の一意性が満足されない。式 (43) から、解の一意性がなくなる際の荷重は、

$$P = 4m^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (50)$$

となる。この荷重のうち $m = 1$ とした際の荷重を座屈荷重といい、

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (51)$$

となる。

第四回の講義で行った、材料力学を用いた座屈荷重の算出では、解の変形モードを仮定した上で、その2つの解が交わる場所を探す、という方法で座屈荷重の算出を行った。いっぽう、大たわみ理論においては、単一の支配方程式 (26) を解き、解の唯一性が成り立たない点を探索することによって座屈荷重を算出している点で異なっている。