平成 30 年度機械・航空宇宙工学科学部講義　応用構造理論
第五回　講義資料

航空宇宙工学専攻　准教授　吉村　彰記

2018 年 5 月 15 日

1　はじめに

本ノートは平成 30 年度機械・航空宇宙工学科の学部講義「応用構造理論」の第 5 回の講義資料である。本講義では，大たわみ理論を用いて，棒の座屈解析を実施した。講義では小林繁夫，近藤恭平著の「弾性力学」(培風社) の第 11 章に基づいて定式化しているが，一部異なるところもあり，また，注釈が必要な点も多いため，別途理論展開を紹介した資料を配布することとした。数式番号等は，講義で使用している番号と同じである。

大たわみ理論で座屈解析をする際のポイントは，「幾何学的な非線形 (Geometrical Nonlinearity) を考慮することによって，方程式の解の唯一性が成立しない点が現れる」ことである。

2　問題設定

本研究で扱う問題の概要を図 1に示す。ここで，応力成分は x 方向の直応力 σ_x のみであるとする。また，はりの長さ l に対して厚さ h は十分小さい $h << l$ とする。また，たわみの一回微分 $\frac{dw}{dx}$ は大きくない (一次の微小量) と仮定する。これにより，

$$\sin\frac{dw}{dx} \approx \frac{dw}{dx} \tag{1}$$

$$\cos\frac{dw}{dx} \approx 1 \tag{2}$$

とみなして良い。

3　非線形を考えない場合の平衡方程式

固体力学，弾性力学の考え方では，微小要素の釣り合いを考えることによって平衡方程式を求める。本問題においても微小要素の力の釣り合いを考える。図 2に，大たわみによる回転によって生じる非線形項を考慮していない場合の力を記す。ただし，T_x は軸力を，Q_x はせん断力を，M_x はモーメントを表している。また，q_x, q_z は単位長さあたりにかかる体積力を表す。x 方向の力の釣り合いは，

$$T_x + \frac{dT_x}{dx}dx - T_x + q_x dx = 0$$

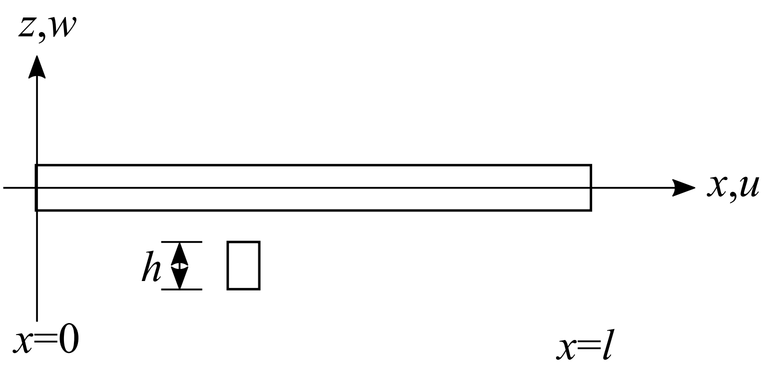

図 1　問題設定

$$\frac{dT_x}{dx} + q_x = 0 \tag{3}$$

となる。また，z 方向の釣り合いは，

$$Q_x + \frac{dQ_x}{dx}dx - Q_x + q_z dx = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} + q_z = 0 \tag{4}$$

となる。微小要素にかかるモーメントの釣り合いに関しては，

$$-\left\{Q_x + \frac{Q_x}{dx}dx\right\}dx + M_x + \frac{dM_x}{dx}dx - M_x = 0$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \tag{5}$$

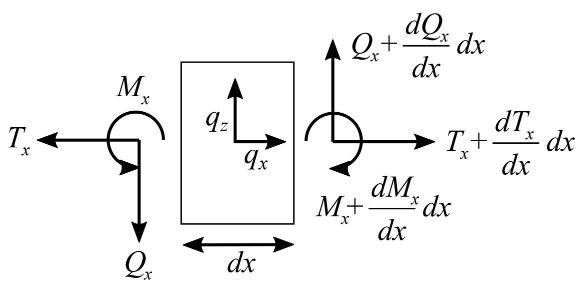

図 2　微小要素の釣り合い

4　大たわみによる非線形性を考慮した平衡方程式

前節では，大たわみによる回転によって生じる非線形項を考慮しない解析を行った。本節では回転を考慮した場合の平衡方程式を算出する。まず，図3に，$x = x$ の位置ではりを仮想的に切断した際に断面に生じてい

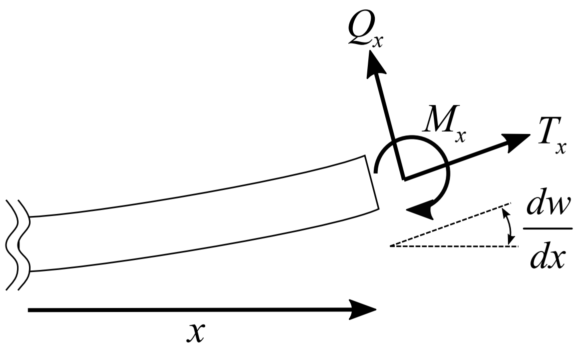

図 3　たわみによって回転した切断面にかかる荷重

る力を示す。断面はたわみによって回転し，$\frac{dw}{dx}$ だけ傾いていることに注意する。この図から，x,z 方向にかかる力は，式 (1) および (2) の近似を考慮すれば，それぞれ

$$T_x \cos\frac{dw}{dx} - Q_x \sin\frac{dw}{dx} \approx T_x - Q_x\frac{dw}{dx} \tag{6}$$

$$Q_x \cos\frac{dw}{dx} + T_x \sin\frac{dw}{dx} \approx Q_x + T_x\frac{dw}{dx} \tag{7}$$

となる。

図 4に，大たわみによって回転が生じた微小要素を示す。全体がたわみによる回転 $\frac{dw}{dx}$ を受けていることに注意する。なお，ここで体積力は回転によってその方向は変化しないものとする。これにより，x 方向の力の

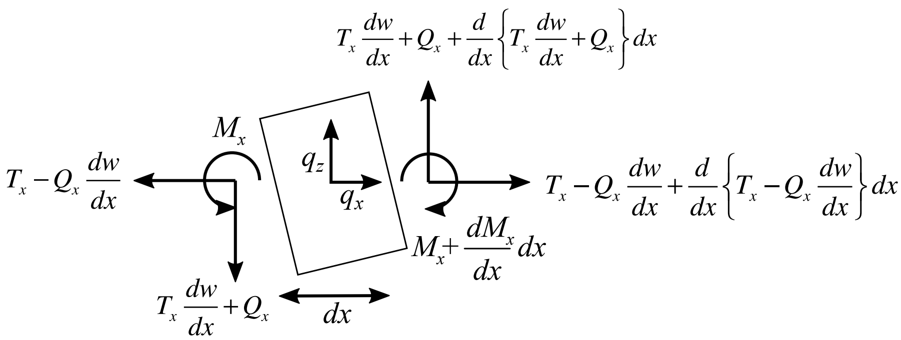

図 4　微小要素の回転を考慮したときの力の釣り合い

釣り合いは，

$$T_x - Q_x\frac{dw}{dx} + \frac{d}{dx}\left(T_x - Q_x\frac{dw}{dx}\right)dx - T_x + Q_x\frac{dw}{dx} + q_x dx = 0$$

$$\frac{dT_x}{dx} - \frac{d}{dx}\left(Q_x\frac{dw}{dx}\right) + q_x = 0 \tag{8}$$

z 方向の力の釣り合いは，

$$T_x\frac{dw}{dx} + Q_x + \frac{d}{dx}\left(T_x\frac{dw}{dx} + Q_x\right)dx - T_x\frac{dw}{dx} - Q_x + q_z dx = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{d}{dx}\left(T_x \frac{dw}{dx}\right) + q_z = 0 \tag{9}$$

モーメントの釣り合いについては回転が無いときと同じであるから，

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \tag{10}$$

となる。第3節で示した式 (3) から (5) と比較すると，回転によって式 (8) および式 (9) の左辺第二項が新たに加わっていることがわかる。

5　その他の弾性力学の等式

5.1　変位-ひずみ関係式

回転を考えない通常の変位-ひずみ関係式は，

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{11}$$

と表すことができる。しかし，大たわみ理論では，たわみによって生じるひずみについても考える。図5に示された微小線素の変形を考えると，ひずみは以下のように計算できる。

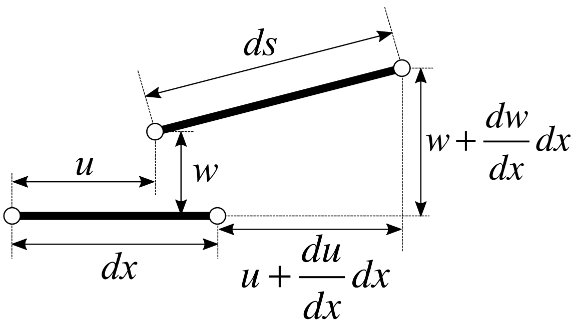

図 5　微小要素の回転を考慮した変位-ひずみの関係

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx}$$

ここで，ds は変形後の微小線素の長さであり，

$$ds = \sqrt{\left(dx + \frac{du}{dx}dx\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}dx\right)^2}$$

となる。これより，

$$\varepsilon_x = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1 \approx \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \tag{12}$$

となる。最右辺の近似については，$\sqrt{(1+x)^2 + y^2}$ を $x = 0, y = 0$ の周りで Taylor 展開することによって得られる。詳しい式展開については講義で行ったため，省略する。式 (12) と式 (11) を参照すると，大たわみを考慮することにより，最右辺第二項が付け加わっていることがわかる。

5.2 構成式

本問題では一方向の直応力のみを考える。また，材料は弾性率 E の弾性体であると考える。すると，構成式は以下のように書くことができる。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{14}$$

この式は通常の弾性の場合と変化はない。

5.3 合応力，モーメント

後に荷重境界条件を考えるため，また，応力と軸力，モーメントとの関係を明瞭にするため，ここで合応力，モーメントの定義をあらためてしておく。

$$T_x = \int_A \sigma_x dA \tag{15}$$

$$M_x = \int_A z\sigma_x dA \tag{16}$$

ここで A ははりの断面であり，$\int_A dA$ は面積積分を表している。