名古屋大学
航空宇宙工学専攻

安全・信頼性工学（3－1）

名古屋大学工学研究科
航空宇宙工学専攻
荒井　政大

信頼性を評価する

例1） 名古屋市千種区の住民100人を無作為に選び出し、その性別を調べたところ、43名が男性であり、47名が女性であった。この結果をして、千種区の住民の半数が男性、半数が女性とみなすことができるか？

例2） さいころを振ってその目を調べたところ、1が6回、2が4回、3が7回、4が3回、5が6回、6が4回、出現した。このさいころは歪みがなく、均等な確率でそれぞれの目がでるさいころであるとみなしてよいか？

このような事象の信頼性を評価することを考えましょう！

さまざまな検定法

1．Χ(カイ)二乗分布による検定法

2．t分布による検定法

3．F分布による検定

χ(カイ)二乗検定

χ 二乗検定とは、帰無仮説が正しければ検定統計量が漸近的にカイ二乗分布に従うような統計学的検定法の総称である。本講義では、最も一般的に用いられる「ピアソンのカイ二乗検定」について解説する。

下記の式で示されるカイ二乗値を評価指標として用いる。「観察された事象の相対的頻度が、ある頻度分布に従う」という帰無仮説を検証する。

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

O:観測度数
E: 期待度数

帰無仮説

数理統計学の用語で，英語ではnull hypothesis。仮説検定で捨てるか捨てないか決めようとする仮説。差がない，効果がない，といった否定形のもの。帰無仮説が測定値によって捨てられれば，差がある，効果があるといった肯定形の結論が得られる。

＜例＞

通行人100人を無作為に抽出したら男：女の比率が61:59だった。これは「男女比が1:1の集団から、ランダムに抽出された100人である」と言えるか。

⇒ この場合の「帰無仮説」は、「集団はランダムに抽出された100人である」ということ。 これが否定されれば、「集団はランダムではない」ということになる。

有意水準

統計的仮説検定を行う場合に，帰無仮説を棄却するかどうかを判定する基準。5% あるいは 1% がよく使用される。有意水準5% で検定を行うということは，第 1 種の過誤をおかす危険率が 5% であることを意味する。すなわち，同様の調査・検定を行うと，20 回に 1 回は得られた結論が誤っていることを表す。「有意水準 α で検定すると有意な差が認められた」ということと，「危険率 α のもとで有意な差があるといえる」は同じような意味で使用される

※有意水準を小さく設定するほど厳しい検定となる

カイ二乗検定の例(1)①

例1） 名古屋市千種区の住民100人を無作為に選び出し、その性別を調べたところ、43名が男性であり、57名が女性であった。この結果をして、千種区の住民の半数が男性、半数が女性とみなすことができるか？

⇒ 帰無仮説は「千種区の住民は半数が男性、半数が女性であり、標本の100名はその母集団から無作為に抽出されたものである」となる。つまり、この仮説が棄却されれば、「千種区の住民は男女同数とは言えない」ということになる。

	O観測度数	E期待度数	O−E	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
男性	43	50	−7	49	0.98
女性	57	50	7	49	0.98

※右はじの値の合計値がカイ二乗値なので、$\chi^2 = 1.96$

カイ二乗検定の例(1)②

カイ二乗値による検定法

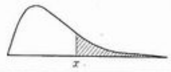
⇒ 自由度（項目数－1）に対応するカイ二乗分布表から、有意水準5%(p=0.05)におけるカイ二乗値を調べる。計算されたカイ二乗値が、分布表により得られた有意水準に対応する値よりも大きければ、帰無仮説は棄却される（検定は適切ではないと判定される）

この問題の場合、自由度1、有意水準5%のカイ二乗値は3.84、データから得られた値は1.96であり、データから求められた値の方が小さいので、帰無仮説は棄却されず、

「男女比同数の千種区民から無作為に選ばれた100人のデータである」と検定される。

カイ二乗分布表

χ^2-分布表



n　α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	α/n
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828	1
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816	2
3	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	3
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467	4
5	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515	5
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458	6
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322	7
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124	8
9	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877	9
10	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588	10
11	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264	11
12	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909	12
13	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528	13
14	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123	14
15	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697	15
16	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252	16
17	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790	17
18	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312	18
19	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820	19
20	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315	20
21	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797	21
22	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268	22
23	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728	23
24	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179	24
25	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620	25
26	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052	26
27	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476	27
28	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892	28
29	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301	29
30	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703	30
31	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098	31
32	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	62.487	32
33	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648	63.870	33
34	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	65.247	34
35	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619	35
36	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	67.985	36
37	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	69.346	37
38	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181	70.703	38
39	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476	72.055	39
40	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402	40
50	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661	50
60	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607	60
70	85.527	90.531	95.023	100.43	104.22	112.32	70
80	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	80
90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	90
100	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	100

Excel関数

CHITEST関数

χ２乗分布の値（χ２条に対する確率値）を返す関数

書式　CHITEST[実測値範囲, 期待値範囲]

⇒　得られた値がp=0.05より大きければ帰無仮説は棄却されない

CHIINV関数

χ２乗分布の右側確率の逆関数の値を返します.

書式　CHIINV[確率, 自由度]

⇒　例えば, 有意確率0.05, 自由度1に対応する値は, 3.8414となります.

カイ二乗検定の例(1)③

計算してみましょう

1. 有意水準を1%とした場合について、先の帰無仮説が棄却されるかどうかを検定しなさい。

2. 抽出された男女の数が、男性39名、女性61名であった場合について、有意水準5%にて、先の帰無仮説が棄却されるかどうかを調べなさい。

カイ二乗検定の例(2)

例2） 日本人のABO式血液型は A=40%, O=30%, B=20%, AB=10%であるものと考える。名古屋大学の学生から無作為に選んだ100名の血液型は以下の表のようであった。名大生の血液型は、上記の日本人の血液型分布とほぼ同じとみなしてよいか検定せよ。

	O観測度数	E期待度数	O−E	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
A型	34	40			
O型	27	30			
B型	25	20			
AB型	14	10			

カイ二乗検定の例(3)

例3）サイコロを振ってその目を調べたところ、1が6回、2が4回、3が7回、4が3回、5が6回、6が4回、それぞれ出現した。このサイコロは歪みがなく、均等な確率でそれぞれの目がでるサイコロであるとみなしてよいか？

t検定

t検定とは、統計量がt分布に従うことを利用する統計学的検定法のことである。母集団が正規分布に従うことを仮定している。t検定は2つのグループの平均の差が偶然誤差の範囲内にあるかどうかを検定するものである。

例えば2つの実験結果により得られた平均値について、その平均値が異なる値である場合、その違いが偶然なのか、それとも何か本質的な違いがあるのか（有意水準5%または有意水準1%で差があると言えるのか）について、判断を下すことができる。

例1①(1標本のt検定)

愛知県のある酒蔵では、アルコール度数13%の日本酒を製造している。出荷品のアルコール度数を30本の無作為抽出により検査したところ、平均値は12.6%, 標準偏差は1.1であった。この生産品のアルコール度数は13%であると言えるか。

⇒ 帰無仮説＝13%である。

対立仮説＝13%とは言えない。

母集団の分散が未知であるが、母集団が正規分布に従うものとして検定する。以下のt値を算出すればよい。

$$t = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{s}$$

$\bar{x}$:標本平均　s :標本標準偏差

μ :母平均　n :標本数

例1②(1標本のt検定)

t値を求めると・・・・　－1.992

この例の場合、値は大きくても小さくてもダメなので、両側検定を行う必要がある。自由度は30-1で29。

⇒ 自由度29, 有意水準5%の場合についてtの境界値を求める。t.inv.2t関数を用いてその値を計算すると、

t.inv.2t (0.05,29) = 2.045

この場合、「検定統計量(の絶対値)＜境界値」となり、帰無仮説は棄却されない。すなわち、アルコール度数は13%であると検定される。

例2①（2標本のt検定＝平均値の差の検定）

t分布を使って，2つのサンプルの母平均（母集団の平均）が等しいかどうかを確認する手法．例えば，ある小学校において、2つのクラスで漢字テストを行ったとして、2つのグループで学力に差があるか否かを検定する．こうした分析方法を2標本検定と呼ぶ．

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$$

$\bar{x},\ \bar{y}$:標本平均

s_x, s_y :標本標準偏差

$m,\ n$:標本数

例2②（2標本のt検定）

	平均点	標準偏差	標本数
6年1組	82	20	30
6年2組	78	19	32

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}} = 0.8062$$

$$v = \frac{(\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n})^2}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^4}{n^2(n-1)}} = 147.58$$

例2③（2標本のt検定）

t値 ：　0.8062
自由度 v　：147.58

⇒ t分布表による検定

自由度147、有意確率5%に対応するt値の臨界値を
1. t分布表から読み取る
2. Excelの関数 t.inv.2t(0.05,147)により計算する。

⇒　臨界値（境界値）1.9762

得られた*t*の境界値(1.96)よりも*t* 値(0.8062)が小さいので、
本例題における帰無仮説は棄却されない！
すなわち、2クラス（標本）の学力には差がないと検定される。

t分布表

	有意確率								
	0.10	0.05	0.01	0.001	両側	0.10	0.05	0.01	0.001
df	0.05	0.025	0.005	0.0005	片側	0.05	0.025	0.005	0.0005
1	6.3138	12.706	63.657	636.62	18	1.7341	2.1009	2.8784	3.922
2	2.9200	4.3027	9.9248	31.598	19	1.7291	2.0930	2.8609	3.883
3	2.3534	3.1825	5.8409	12.941	20	1.7247	2.0860	2.8453	3.850
4	2.1318	2.7764	4.6041	8.610	21	1.7207	2.0796	2.8314	3.819
5	2.0150	2.5706	4.0321	6.859	22	1.7171	2.0739	2.8188	3.792
6	1.9432	2.4469	3.7074	5.959	23	1.7139	2.0687	2.8073	3.767
7	1.8946	2.3646	3.4995	5.405	24	1.7109	2.0639	2.7969	3.745
8	1.8595	2.3060	3.3554	5.041	25	1.7081	2.0595	2.7874	3.725
9	1.8331	2.2622	3.2498	4.781	26	1.7056	2.0555	2.7787	3.707
10	1.8125	2.2281	3.1693	4.587	27	1.7033	2.0518	2.7707	3.690
11	1.7959	2.2010	3.1058	4.437	28	1.7011	2.0484	2.7633	3.674
12	1.7823	2.1788	3.0545	4.318	29	1.6991	2.0452	2.7564	3.659
13	1.7709	2.1604	3.0123	4.221	30	1.6973	2.0423	2.7500	3.646
14	1.7613	2.1448	2.9768	4.140	40	1.6839	2.0211	2.7045	3.551
15	1.7530	2.1315	2.9467	4.073	60	1.6707	2.0003	2.6603	3.460
16	1.7459	2.1199	2.9208	4.015	120	1.6577	1.9799	2.6174	3.373
17	1.7396	2.1098	2.8982	3.965	∞	1.6449	1.9600	2.5758	3.291

引用文献：猪股清二　1990　統計学ハンドブック　聖文社

例3（2標本のt検定）

20人の被験者に対して、サッカー用シューズと、ジョギング用シューズをはいて100メートルを走らせた時のタイムを計測した。これら結果には、有意な差があると言えるだろうか。T検定を用いて判断せよ。

サッカーシューズ				ランニングシューズ			
1	12.5s	11	12.8s	1	12.8s	11	12.7s
2	13.6s	12	13.2s	2	13.5s	12	13.1s
3	12.8s	13	12.6s	3	12.4s	13	12.7s
4	14.2s	14	14.0s	4	14.0s	14	13.8s
5	12.3s	15	13.1s	5	12.4s	15	13.2s
6	14.1s	16	12.8s	6	14.0s	16	12.7s
7	13.8s	17	13.2s	7	13.6s	17	13.4s
8	12.2s	18	12.8s	8	12.4s	18	12.9s
9	13.1s	19	13.2s	9	13.0s	19	13.3s
10	12.9s	20	13.0s	10	12.8s	20	12.8s

カイ二乗検定・t検定について（まとめ）

・カイ二乗検定、t検定ともに、本講義で述べたのはほんの一例です。

・カイ二乗分布やt分布表について、その数学・統計的な意味についての説明は割愛しました。興味があればぜひ調べてみてください。

・有意水準を5%とするか、1%にするかによって検定の結果は変わってきます。適切な有意水準を設定することが重要です。

ワイブル分布

ワイブル分布は、物体の強度を評価するための確率論的指標を得るために1939年に提案された。一般には、チェーンモデルと呼ばれ，チェーンを引っ張って破壊する場合を想定している．いわゆる直列モデルでは，最も強度が低いチェーンの輪が最初に破壊してしまえば鎖全体が破壊したと判定される（最弱リンクモデル）．

材料の破壊，特に脆性材料では，最も弱い部位が破断してしまえば全体が機能を失うと（破壊したものと）みなされるので，材料強度を評価する際にワイブル分布が広く利用されている．

また，この考え方を機械の故障に適用すると，いくつかの部品のうち，どれか一つが故障すればその機械は「故障した」を判定されることから，この最弱リンクモデルの考え方が適用できる．そのため，部品や機械の劣化や故障による寿命を統計的に評価するための指標としても，ワイブル分布は広く用いられている．

累積密度関数

ワイブル分布の累積密度関数：

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b}\right\} \qquad \text{(W.1)}$$

xは変数，bは形状パラメータ(ワイブル係数), θは尺度パラメータ（統計的な指標）を表す．形状パラメータbは分布の形状や破壊のパターンに深く関係をもち，bの値が増大すると分布の幅が狭くなり，減少すると分布の幅が広がる．すなわち，bはデータのバラツキを表しており，bの値が大きいほどデータのバラツキが小さく，信頼性が高いことを示している．上式において$x = \theta$ とすると，

$$F(\theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{\theta}\right)^{b}\right\}=0.632 \qquad \text{(W.2)}$$

すなわち尺度パラメータ（統計的な指標）とは，累積破壊率63.2%となる際の値という意味であることが確かめられる．

累積密度関数(2)

式(1)の両辺について，対数を2度とって整理すると，

$$\ln\ln(1-F)^{-1} = b(\ln x - \ln\theta) \qquad \text{(W.3)}$$

数したがって，縦軸を$\ln(1\text{-}F)^{-1}$，横軸を$\ln x$はとすると，両者の関係は一次関数となる．つまり，ワイブル分布を上式で近似すれば，その傾きからパラメータbを読み取ることができる．同様に，累積破壊率Fからθを読み取ることができる．

<u>メディアンランク法によるFの計算式：</u>

$$F = \frac{i-0.3}{n+0.4} \qquad \text{(W.4)}$$

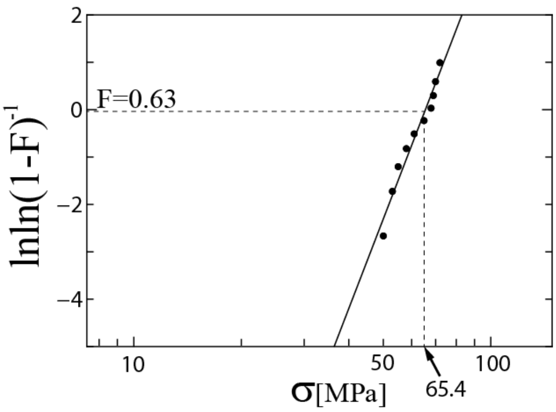
n: サンプル数，i: 順序数

メディアンランク法による解析例

＜解析例＞引張試験のデータをワイブル分布で評価する．
→ Excel等で，データ，F=(i+0.3)/(n+0.4), lnln(1/(1−F)),
lnσを整理して，ワイブル分布を求める準備をする．

i	σ(破壊応力)	*F*	lnln{1/(1-F)}	lnσ
1	50	0.067308	-2.66384308538817	3.912023
2	53	0.163462	-1.72326315027689	3.970292
3	55	0.259615	-1.20202311524655	4.007333
4	58	0.355769	-0.82166651512869	4.060443
5	61	0.451923	-0.50859539373415	4.110874
6	65	0.548077	-0.23036544473332	4.174387
7	68	0.644231	0.03292496191434	4.219508
8	69	0.740385	0.29903293186205	4.234107
9	70	0.836538	0.59397721666039	4.248495
10	72	0.932692	0.99268892949027	4.276666

ワイブルプロット



- lnln(1-F)とlnσのグラフを作成して，最小二乗により一次近似・・・
- F=0.63(累積破壊確率63%)に対応する応力値を読み取る
- 得られた尺度値がワイブルプロットにより得られる統計的な応力の臨界値（尺度値）となる.

ジョンソン法を用いたワイブルプロット

ガラス板に直径10mmの鋼球を衝突させて，ガラス板が破壊する際の鋼球の衝撃エネルギーを調べた.
○＝破壊が生じたエネルギー値，×＝破壊が生じなかったエネルギー値

E[J]	判定	E[J]	判定
0.9	×	6.2	×
1.2	×	6.8	○
1.6	×	7.3	○
2.1	×	7.9	×
2.7	○	8.5	○
3.8	×	8.2	○
4.1	×	9.1	○
4.8	×	9.2	×
5.3	○	9.8	○
6	×	10.1	○

→ 破壊が生じなかった実験結果も，統計データとして反映させたい場合に，ジョンソン法は有効な方法となる.

平均故障順位を用いる考え方

平均故障順位(i)= 平均故障順位(i-1) + Δ(i, i-1)　(J.1)

$$\Delta(i, i-1) = \frac{(n+1) - \text{平均故障順位}(i-1)}{1+(n-i)} \qquad \text{(J.2)}$$

＜手順＞
(1)　破壊が生じた際のデータ(故障データ)と破壊が生じなかった際のデータ(打ち切りデータ)をともに含んだ応力値(エネルギー)を小さい順に並べる.
(2) 最小のデータに対して，平均破壊順位ならびに平均故障順位の増分Δの初期値を与える.
- 最小のデータで破壊が生じたとき：　平均故障順位＝1, Δ＝1
- 最小のデータで破壊が生じなかったとき：
  平均故障順位＝0, 増分は手順(3)に準ずる

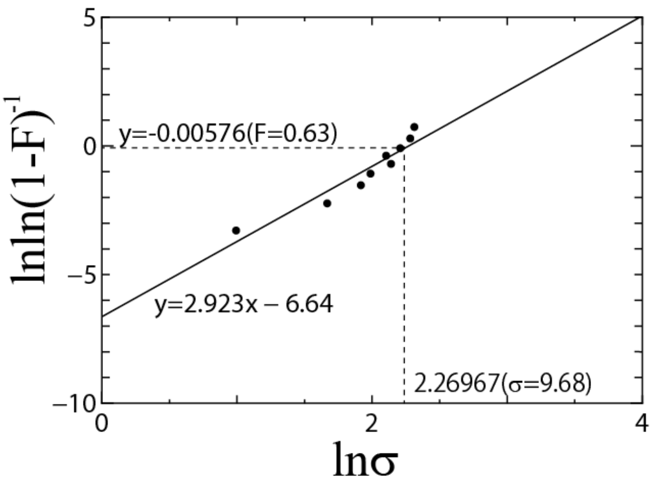
計算手順（ジョンソン法）

(3) 故障データについてのみ，式(J.1)により平均故障順位を求める.
ただし，平均故障順位の増分Δは一つ以上の打ち切りデータにあう際に変化し，式(J.2)により算出するものとする.

(4) 平均故障順位に基づき，式(W.4)よりメディアンランクFを算出する.

No.	E[J]	破壊順位	増分	平均破壊順位	F	lnln{1/(1-F)}	lnE
1	0.9		1.050E+00				
2	1.2						
3	1.6						
4	2.1						
5	2.7	1		1.050E+00	3.676E-02	-3.285E+00	
6	3.8		1.330E+00				
7	4.1						
8	4.8						
9	5.3	2		1.050E+00	3.676E-02	-3.285E+00	
10	6.0		1.909E+00				
11	6.2						
12	6.8	3		2.959E+00	1.303E-01	-1.969E+00	1.917E+00
13	7.3	4		4.868E+00	2.239E-01	-1.372E+00	
14	7.9		2.305E+00				
15	8.5	5		7.173E+00	3.369E-01	-8.896E-01	2.140E+00
16	8.2	6		9.477E+00			
17	9.1	7		1.178E+01	5.628E-01	-1.894E-01	2.208E+00
18	9.2		3.073E+00				2.219E+00
19	9.8	8		1.485E+01	7.135E-01	2.230E-01	2.282E+00
20	10.1	9		1.793E+01	8.641E-01	6.910E-01	2.313E+00

ジョンソン法：ワイブルプロット



得られた強度（尺度）は9.68MPa

→ *通常の方法よりも高い値が求められる傾向があるようです.*

演　習　（χ2検定）

サイコロを振ってその目を調べ，そのサイコロが「均等に目がでるサイコロである」という帰無仮説について，カイ二乗値を用いて検証しなさい（=0.05 とします）．

サイコロの目	観測度数O	期待度数E	O-E	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
1					
2					
3					
4					
5					
6					